

Dans cette séance on va voir:

- (i) la définition d'espace vectoriel, ainsi que plusieurs exemples $(\mathbb{R}^n, \mathbb{P}_n, \dots)$;
- (ii) la notion de sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel;
- (iii) les notions de famille libre et liée dans un espace vectoriel;
- (iv) la définition de sous-espace vectoriel engendré par une famille
- (v) la définition de combinaison linéaire de vecteurs dans un espace vectoriel

Cas d'un
esp. vect.
 $\mathbb{C}^n$!

§ 4.2. Définition d'espace vectoriel

Déf 4.2 | Un espace vectoriel (réel) est un ensemble non vide V muni de deux applications:

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V & (\text{addition}) & \text{ et } & \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V & (\text{ou produit}) \\ (v, w) &\longmapsto v + w & \text{ ou } & & (\lambda, v) &\longmapsto \lambda \cdot v & (\text{multiplication par des scalaires}) \\ & & (\text{somme}) & & & & \end{aligned}$$

satisfaisent aux propriétés:

(EV.1) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (commutativité);

(EV.2) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$ (associativité);

(EV.3) il existe un élément $0_V \in V$ tel que $u + 0_V = u, \forall u \in V$; ($0_V =$ vecteur nul de V)

(EV.4) pour tout $u \in V$ il existe un élément $-u \in V$ tel que $u + (-u) = 0_V$; ($-u =$ vecteur opposé de $u \in V$)

(EV.5) $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v, \forall u, v \in V, \forall c \in \mathbb{R}$; (distributivité I)

(EV.6) $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u, \forall u \in V, \forall c, d \in \mathbb{R}$; (distributivité II)

(EV.7) $c \cdot (d \cdot u) = (c \cdot d) \cdot u, \forall u \in V, \forall c, d \in \mathbb{R}$; (associativité mixte)

(EV.8) $1 \cdot u = u, \forall u \in V$.

Désormais, sauf indication contraire

vecteur = élément d'un espace vectoriel donné

Exemple G

(1) L'ensemble $V = \mathbb{R}^n$ avec la somme $V \times V \rightarrow V$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ et la multiplication par des scalaires } \mathbb{R} \times V \rightarrow V \text{ donnée par}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \text{ est un espace vectoriel. Dans ce cas } 0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{on l'écrit typiquement } \vec{0}$$

$$\text{et } - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}.$$

(2) L'ensemble $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction}\}$ avec la somme $V \times V \rightarrow V$ ^{(on écrit parfois $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)}

donnée par $(f+g)(t) := f(t) + g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ et la multiplication par scalaires $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

par $(\lambda.f)(t) = \lambda.f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (avec $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$) est un espace vectoriel (Exercice 1, (e) de la série 3). Dans ce cas 0_V est la fonction nulle, i.e. $0_V(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, et, si $f \in V$, alors $(-f)(t) = -f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(3) On rappelle qu'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite polynomiale s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Dans ce cours, ^{notation standard d'un polynôme}

polynôme = fonction polynomiale (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) (cela est OK lorsqu'on travaille avec des coefficients dans $\mathbb{R}$). voir Thm 4.17

Un fait fondamental sur les polynômes est

$$a_0 + \dots + a_n t^n = b_0 + \dots + b_m t^m, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{ssi} \quad a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots \quad (*)$$

(on va l'utiliser plusieurs fois sans l'expliquer). ^(on va l'utiliser plusieurs fois sans l'expliquer) ← Noter que $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + 0 t^3 + \dots$

On note $\mathbb{P} := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction polynomiale}\}$. Si $f \in \mathbb{P}$ et donc $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, on dit que

$\deg(f) = -\infty$ si $a_0 = \dots = a_n = 0$ et $\deg(f) = n$ si $a_n \neq 0$. ^(degré de f)

On note aussi $\mathbb{P}_n := \{f \in \mathbb{P} : \deg(f) \leq n\}$.

cette définition est OK grâce à (*)

On considère la somme $\mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ donnée par

$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$ et la multiplication par scalaires $\mathbb{R} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$

donnée par $(\lambda.f)(t) = \lambda.f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (ce sont les mêmes que pour $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction}\}$)

On vérifie que si $f, g \in \mathbb{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g \in \mathbb{P}$ et $\lambda.f \in \mathbb{P}$ aussi.

En effet, si $f = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ et $g = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$, alors (on suppose $\deg f \leq m$)

$$(f+g)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_n + b_n)t^n + b_{n+1}t^{n+1} + \dots + b_m t^m \in \mathbb{P}$$

$$(\lambda.f)(t) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + \dots + (\lambda a_n)t^n \in \mathbb{P}.$$

Alors, $\mathbb{P}$ est un espace vectoriel (Exercice 1, (b) de la série 3).

Dans ce cas, 0_P est la fonction nulle (ou polynôme nul) et, si $f \in P$, de la forme $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, alors $(-f)(t) = (-a_0) + (-a_1)t + \dots + (-a_n)t^n, \forall t \in \mathbb{R}$. Avec la somme et la multiplication par scalaires précédents appliquées à des éléments de P_n on voit que P_n est un espace vectoriel (Exercice 1, (a), de la série 3). Pour le montrer, vous allez utiliser que

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g)) \quad \text{pour tous } f, g \in P$$

(4) L'ensemble $V = M_{m \times n}(\mathbb{R}) := \{ A \text{ matrice de taille } m \times n \text{ à coefficients réels} \}$ muni de la somme $V \times V \rightarrow V$ donnée par

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m,1} & \dots & B_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \dots & A_{1,n} + B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} + B_{m,1} & \dots & A_{m,n} + B_{m,n} \end{pmatrix}$$

et la multiplication par scalaires $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ donnée par

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m,1} & \dots & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix}$$

est un espace vectoriel. Dans ce cas

$$0_V = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad - \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{1,1} & \dots & -A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ -A_{m,1} & \dots & -A_{m,n} \end{pmatrix}$$

on le note typiquement 0

Quelques propriétés (voir Exercice 2 de la série 3)

- (a) L'élément 0_V de V qui satisfait (E.V.3) est unique
- (b) L'élément $-u$ de V associé à chaque $u \in V$ est unique
- (c) + (d) $0 \cdot u = 0_V, \forall u \in V$; $-0_V = 0_V$ et $c \cdot 0_V = 0_V, \forall c \in \mathbb{R}$
- (e) $(-1) \cdot u = \underbrace{-u}_{\text{opposé de } u \in V}, \forall u \in V$

on peut donc parler du vecteur nul ∇ (il n'y a pas plusieurs dans V)

on peut donc parler du vecteur opposé de u (il n'y a pas plusieurs dans V)

La notion d'espace vectoriel essaie de donner un langage

SLOGAN = structure commune pour traiter plusieurs types d'exemples de façon simultanée!

Observation: On a les espaces vectoriels $\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{P} \subseteq \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{fonction}\}$

En fait plusieurs espaces vectoriels se trouvent naturellement "à l'intérieur" d'autres espaces vectoriels $\rightarrow$ **Notion de sous-espace vectoriel**

Déf. 4.19 Soit V un espace vectoriel avec somme $V \times V \rightarrow V$ et multiplication $(u, v) \mapsto uv$ par scalaires $(\mathbb{R} \times V \rightarrow V)$. Une partie $W \subseteq V$ est dite un sous-espace vectoriel de V si

(SEV.1) $0_V \in W$;

(SEV.2) $u + v \in W$ pour tous $u, v \in W$;

(SEV.3) $\lambda \cdot u \in W$ pour tout $u \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

sous-entendues en général

Prop Pour V un espace vectoriel comme dans la Déf 4.19 et $W \subseteq V$ une partie, alors W est un sous-espace vectoriel si et seulement si

(SEV.1) $0_V \in W$ et (SEV.2') $u + \lambda v \in W$, pour tous $u, v \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Preuve) C'est clair que (SEV.2) + (SEV.3) impliquent (SEV.2'). On va montrer que (SEV.1) + (SEV.2') impliquent (SEV.2) et (SEV.3).

D'abord, (SEV.2') avec $\lambda = 1$ nous dit que $u + 1 \cdot v \in W$, i.e. $u + v \in W$, d'après (EV.8). Finalement, (SEV.2') avec $u = 0_V (\in W, \text{d'après (SEV.1)})$ nous dit que $0_V + \lambda \cdot v \in W$, i.e. $\lambda v \in W$, d'après (EV.1) et (EV.3). $\square$

Exemple 4.1 $\mathbb{P} (\subseteq \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{fonction}\})$ est un sous-espace vectoriel de $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{fonction}\}$.

Exemple 4.22 $\mathbb{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}$.

Exemple 4.23 / La partie $\{t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (exercice). [16]

La définition suivante est la même que celle donnée pour $\mathbb{R}^n$, mais dans un contexte plus général:

Déf. 4.14 / Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ une famille

de vecteurs de V . Une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ est une expression de la forme

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \leftarrow \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ sont les coefficients de la combinaison linéaire.})$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$. En plus, on dit que $\mathcal{F}$ est liée (ou linéairement dépendante) dans V s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = \mathbf{0}_V.$$

Si $\mathcal{F}$ n'est pas liée, on dit que $\mathcal{F}$ est libre (ou linéairement indépendante) dans V .

RK F / Pour $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, les notions de combinaison linéaire, famille liée et famille libre sont les mêmes que celles vues précédemment pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4.16 / Soit $V = \mathbb{P}$ et la famille $\mathcal{F} = \{1, t, t^2, \dots, t^p\} \subseteq \mathbb{P}$.

Abrs $\mathcal{F}$ est libre. En effet, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \lambda_3 \cdot t^2 + \dots + \lambda_{p+1} \cdot t^p = \mathbf{0}_{\mathbb{P}}$$

D'après le fait fondamental (*) sur les polynômes, ^{polynôme nul} on a que

$$\mathbf{0}_{\mathbb{P}} = 0 + 0 \cdot t + \dots + 0 \cdot t^p + 0 \cdot t^{p+1} + \dots, \text{ on a que}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{p+1} = 0,$$

ce qui nous dit que $\mathcal{F}$ est libre dans $\mathbb{P}$.

Déf. 4.25 / Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ une famille de vecteurs de V . On définit la partie engendrée par $\mathcal{F}$ (ou le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$) par

$$\text{Vect } \mathcal{F} (= \text{Vect } \{v_1, \dots, v_p\}) = \left\{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \right\}$$

ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de la famille $\mathcal{F}$

RK.F Pour $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, on trouve la même définition que celle qu'on a vue pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Propriété fondamentale (Lemme 4) Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ une famille. Alors $\text{Vect } \mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de V .

(Preuve) On voit bien que

$$0_V = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_p \in \text{Vect } \mathcal{F}.$$

En outre, si $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \in \text{Vect } \mathcal{F}$ et $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p \in \text{Vect } \mathcal{F}$,
alors (E.V.5) & (E.V.7)

$$\begin{aligned} u + \lambda w &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p) \stackrel{(E.V.1)}{=} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda \mu_1 v_1 + \dots + \lambda \mu_p v_p \\ &\stackrel{(E.V.6)}{=} (\lambda_1 + \lambda \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_p + \lambda \mu_p) v_p \stackrel{(E.V.6)}{=} (\lambda_1 + \lambda \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_p + \lambda \mu_p) v_p \\ &\in \text{Vect } \mathcal{F} \quad \square \end{aligned}$$

Exemple 4.26 Soit $\mathbb{P}$ l'espace vectoriel de polynômes et

$$\mathcal{F} = \{1, t, t^2\}. \text{ Alors } \text{Vect } \mathcal{F} = \{ \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \lambda_3 \cdot t^2 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \}$$

On affirme que $\text{Vect } \mathcal{F} = \mathbb{P}_2$. En effet, on voit bien que

$$\deg(\lambda_1 + \lambda_2 t + \lambda_3 t^2) \leq 2 \text{ pour tout } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

ce qui implique que $\text{Vect } \mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}_2$. En outre, si $f \in \mathbb{P}_2$, alors

$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que f est une combinaison linéaire des éléments dans $\mathcal{F}$, i.e. $f \in \text{Vect } \mathcal{F}$.

En conséquence $\mathbb{P}_2 \subseteq \text{Vect } \mathcal{F}$, ce qui nous dit que $\mathbb{P}_2 = \text{Vect } \mathcal{F}$.